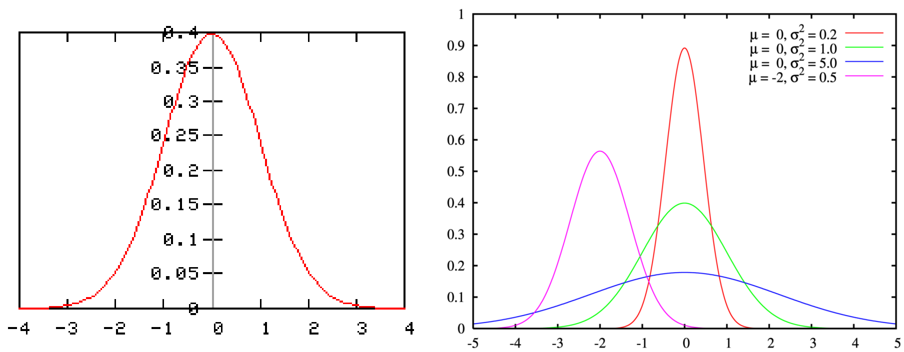
Rappel : l'objectif de cette correction est de réunir toutes les étapes et remarques nécessaires à la compréhension et la résolution d'un exercice donné. La correction d'exercice qui suit peut-être utilisée comme un modèle de ce que l'on peut attendre d'un étudiant, toutes les parties en *italique* et en note de bas de page[1] dans cette correction sont des remarques très utiles pour la compréhension mais qu'on ne s'attend pas à trouver sur une copie.

1 Exercice 6 TD 2

Pour tout connaître sur la loi normale :
- `http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale`
- `http://mathworld.wolfram.com/NormalDistribution.html`

1.1 Graph et largeur à mi-hauteur



(a) (b)

FIG. 1 – (a) La loi normale centrée réduite, (b) quelques lois normales pour différentes valeurs de μ et σ^2.

La loi de la densité de probabilité est :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Cette fonction est maximale pour $x = \mu$ et vaut :

$$p_{max} = p(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}$$

Pour connaître la largeur à mi-hauteur on calcule la valeur de x tel que $p(x) = \frac{1}{2}p_{max}$.

[1] note de bas de page

Il faut donc résoudre l'équation :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\,\pi}} \quad (1)$$

$$(\frac{x-\mu}{\sigma})^2 = 2\log 2 \quad (2)$$

$$x = \mu \pm \sigma\sqrt{2\log 2} \quad (3)$$

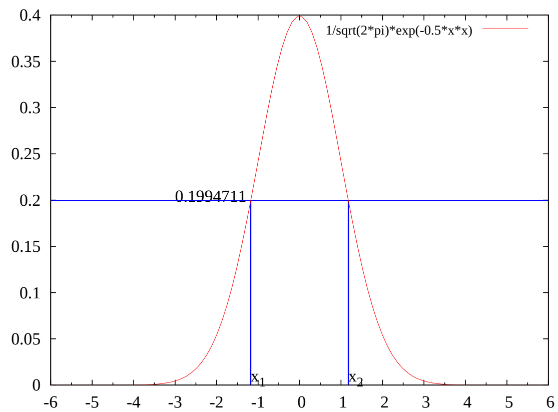


FIG. 2 – $x_1 = \mu - \sigma\sqrt{2\log 2}$ et $x_2 = \mu + \sigma\sqrt{2\log 2}$

La largeur à mi-hauteur est donc donnée par :

$$x_2 - x_1 = \mu + \sigma\sqrt{2\log 2} - (\mu - \sigma\sqrt{2\log 2}) \quad (4)$$

$$= 2\sigma\sqrt{2\log 2} \quad (5)$$

Ce nombre est indépendant de la moyenne (μ) qui n'est qu'un paramètre de translation. Ce nombre ne dépend que de l'écart type qui est le paramètre qui décrit l' "écrasement" de la courbe (fig. 1(b)).

1.2 Espérance et variance de la loi Normale

l'espérance est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

En faisant le changement de variable : $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ dans l'intégrale, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}(\sigma u + \mu)\sigma du \quad (6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} u\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}du + \mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}du \quad (7)$$

La première intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} u\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}du$ est celle d'une fonction impaire[2] et son intégrale vaut donc 0. *Dessinez donc les aires de part et d'autre de l'axe $y = 0$ pour vous en convaincre !*
La seconde intégrale est bien connue : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}du$ c'est celle de la loi normale qui vaut 1 car c'est une distribution de probabilité.

Finalement :

$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mu}$

La variance est donnée par la formule :

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 p(x)dx$$

Avec le même changement de variable que précédemment :

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^2 u^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} du \tag{8}$$

Puis on fait une intégration par partie, en posant :

$$\begin{array}{ccccccc} a & = & -u & \text{d'où} & a' & = & -1 \\ b & = & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} & \text{d'où} & b' & = & -u\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \end{array}$$

On a $ab' = u^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}$ d'où :

$$\begin{aligned} Var(X) &= [-u\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^2 (-1) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} du & (9) \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} du & (10) \\ &= \sigma^2 & (11) \end{aligned}$$

Car on reconnaît une fois de plus l'intégrale de la loi normale et que lorsque u tend vers $\pm\infty$ alors $u\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}$ vaut 0.

En utilisant la propriété 1 page 12 du cours de Frédérique Leblanc, on a pout $t \geq 0$:

$$P(\mu - t < X < \mu + t) = \phi(\frac{\mu + t - \mu}{\sigma}) - \phi(\frac{\mu - t - \mu}{\sigma}) = \phi(\frac{t}{\sigma}) - \phi(\frac{-t}{\sigma})$$

or comme $\phi(-a) = 1 - \phi(a),\ \forall a \geq 0$ on a :

$$P(\mu - t < X < \mu + t) = 2\phi(\frac{t}{\sigma}) - 1$$

[2] les fonctions f telles que $f(x) = -f(-x)$.

Il suffit donc de résoudre l'équation suivante :

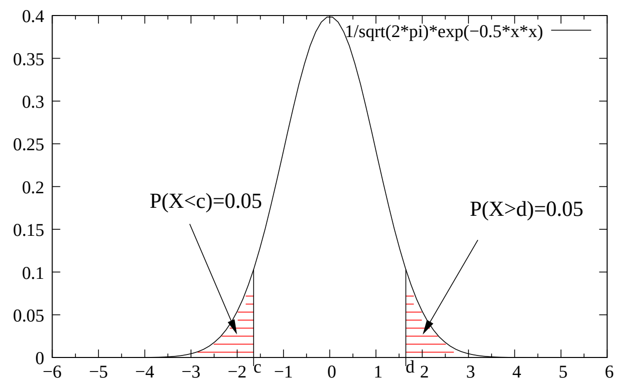
$$2\phi(\frac{t}{\sigma}) - 1 = p \quad (12)$$

$$\phi(\frac{t}{\sigma}) = \frac{p+1}{2} \quad (13)$$

Pour $p = 0.95$ et $p = 0.99$, on fait les lectures nécessaires dans la table de la fonction de répartition de la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$:

1. $p = 0.95$, $\phi(\frac{a}{\sigma}) = 0.975$ et $\frac{a}{\sigma} = 1.96$ et $\boxed{a = 1.96\sigma}$
2. $p = 0.99$, $\phi(\frac{b}{\sigma}) = 0.995$ et $\frac{b}{\sigma} = 2.58$ et $\boxed{b = 2.58\sigma}$

1.3 $P(X < c) = 0.05$ et $P(X > d) = 0.05$



Pour c, il est équivalent de chercher le symétrique par rapport à la moyenne : En effet, c est situé à gauche de la moyenne sur l'axe des abscisses et si on pose :

$$\delta = \mu - c$$

On a $P(X < \frac{(\mu+\delta)-\mu}{\sigma}) = 1 - 0.05 = 0.95$ et une lecture dans la table de la fonction de répartition de la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$donne :

$$\frac{\delta}{\sigma} = 1.645 \quad (14)$$

$$\delta = 1.645\sigma \quad (15)$$

$$(16)$$

En remplaçant δ par son expression dans (15) : $\boxed{c = \mu - 1.645\sigma}$
En posant :

$$\delta = d - \mu$$

On a $P(X < d) = 1 - 0.05 = 0.95$ et d'après ce qui précède :

En remplaçant δ par son expression dans (15) : $\boxed{d = \mu + 1.645\sigma}$

On vérifie la cohérence de nos résultats : $\frac{d+c}{2} = \mu$ *ce qui est cohérent avec le fait que d et c sont symétriques par rapport à la moyenne parce qu'ils sont les bornes de queues de guaussiennes de même poids :* 0.05.