Rappel : l'objectif de cette correction est de réunir toutes les étapes et remarques nécessaires à la compréhension et la résolution d'un exercice donné. La correction d'exercice qui suit peut-être utilisée comme un modèle de ce que l'on peut attendre d'un étudiant, toutes les parties en *italique* et en note de bas de page[1] dans cette correction sont des remarques très utiles pour la compréhension mais qu'on ne s'attend pas à trouver sur une copie.

1 Exercice 2 TD 2

On sait qu'un tirage dans un jeu de pile ou face suit une loi de Bernoulli, cependant ce qui nous intéresse c'est la loi du nombre de face lorsque l'on a fait n tirages.
Cette loi est celle de la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où p est la probabilité de faire pile.Dans la suite nous considérons que la pièce n'est pas biaisée : $p = 0.5$.
Notre univers est l'ensemble des suites à n éléments avec répétitions : {"pile", "face"}^{n}.
L'événement "au moins un face parmi n lancers" est l'union des événements avoir exactement 1 face, exactement 2 faces, ..., exactement n faces.
C'est donc aussi l'événement complémentaire de l'événement F_0 : "avoir 0 faces". Sa probabilité est donc :

$$1 - P(F_0)$$

Or l'événement F_0 est aussi l'événement avoir n piles, dont la probabilité est :

$$P([X = n]) = C_n^n p^n (1 - p)^{n-n} = p^n$$

La probabilité d'avoir au moins un face au cours de n lancers est donc $1-p^n$.
Résoudre notre problème revient donc à calculer n tel que $1 - p^n \geq 0.95$ soit

$$p^n \leq 0.05 \quad (1)$$
$$n \ln p \leq \ln \frac{1}{20} \quad (2)$$
$$(3)$$

En prenant le logarithme de la partie droite et gauche puis en remplaçant p par $1/2$:

$$n \ln 2 \geq \ln 20 \ , \quad (4)$$
$$n \geq \frac{\ln 20}{\ln 2} \ . \quad (5)$$

On trouve $n \geq 4.32$.
Donc si on veut être sûr à 95% il faut faire au moins $\boxed{\text{5 lancers}}$.

[1] note de bas de page